# Ciągi rekurencyjne i indukcja

Wyrazy ciągów rekurencyjnych, wzory ogólne, dowody indukcyjne.

Dział: **Ciągi** Liczba zadań: **22** Wygenerowano: **14 września 2026** allmath.pl

**PRZYPOMNIENIE**

Ciąg określony rekurencyjnie: podajemy pierwszy wyraz (lub kilka) i regułę obliczania następnego z poprzednich, np. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Indukcja matematyczna: sprawdzamy dla $n = 1$, zakładamy dla $n$, dowodzimy dla $n + 1$.

## 1 Oblicz cztery pierwsze wyrazy ciągu

**a)** $a_1 = -2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$

**b)** $a_1 = -2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

**c)** $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$

**d)** $a_1 = -3,\ a_{n+1} = 3a_n + 4$

**e)** $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

**f)** $a_1 = -1,\ a_{n+1} = 3a_n + 3$

**g)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

**h)** $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$

## 2 Ciąg Fibonacciego i podobne

**a)** $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

**b)** $a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

**c)** $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

**d)** $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

## 3 Podaj wzór ogólny ciągu danego rekurencyjnie

**a)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 4$

**b)** $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 5$

**c)** $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 1$

**d)** $a_1 = -5,\ a_{n+1} = a_n + 1$

**e)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 1$

**f)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1$

## 4 Indukcja – wykaż (zapisz krok indukcyjny)

**a)** Wykaż, że $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \geq 1$.

**b)** Wykaż, że $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

**c)** Wykaż, że $2^n > n$ dla $n \geq 1$.

**d)** Wykaż, że $7^n - 1$ jest podzielne przez 6 dla $n \geq 1$.

# Odpowiedzi — Ciągi rekurencyjne i indukcja

### Zadanie 1. Oblicz cztery pierwsze wyrazy ciągu

**a)** -2, -3, -5, -9

**b)** -2, -4, -10, -28

**c)** 0, -1, -4, -13

**d)** -3, -5, -11, -29

**e)** 4, 7, 13, 25

**f)** -1, 0, 3, 12

**g)** 1, 1, 1, 1

**h)** 4, 11, 32, 95

### Zadanie 2. Ciąg Fibonacciego i podobne

**a)** a_7 = 37

**b)** a_7 = 39

**c)** a_7 = 31

**d)** a_7 = 13

### Zadanie 3. Podaj wzór ogólny ciągu danego rekurencyjnie

**a)** $a_n = -4n + 6$

**b)** $a_n = 5n - 1$

**c)** $a_n = -n + 4$

**d)** $a_n = n - 6$

**e)** $a_n = -n + 3$

**f)** $a_n = n$

### Zadanie 4. Indukcja – wykaż (zapisz krok indukcyjny)

**a)** $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

**b)** $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

**c)** $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n \geq n+1$

**d)** $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$